Soit (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace probabilisé.

I. Cas d'une v.a.r. discrète p.55.

A. Espérance.

Il s'agit de la moyenne des valeurs de X pondérées par leur probabilité d'apparition.

Def 1: Soit X une var (1) discrète.
On appelle **espérance de X** le réel:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i) \text{ si } X(\Omega)=\{x_1;\dots;x_n\}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X=x_i) \text{ si } X(\Omega)=\{x_i / i\geq 1\},$$

si cette dernière série converge absolument.
La cv. abs induit la cv. commutative de la série, nécessaire pour que la numérotation des éléments de X(Ω) n'intervienne pas.

Exemple 3.1 p.54...: Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables autoucher. On mise 10€, puis on tire successivement 2 boules avec remise. On gagne 8€ par boule rouge obtenue. On note X la var prenant la valeur du gain final. $X(\Omega)=\{-10;-2;+6\}$.

X(Ω)	-10	-2	+6
P(X=x_i)	16/49	24/49	9/49

$$E(X)=(-10)\times\frac{16}{49}+(-2)\times\frac{24}{49}+6\times\frac{9}{49}=-\frac{22}{7}$$

Exemples "classiques":

Loi uniforme sur $[\![1;n]\!] \rightarrow E(X)=\frac{n+1}{2}$

Loi de Bernoulli $\rightarrow E(X)=p$

Loi binomiale $\rightarrow E(X)=np$

Loi géométrique $\rightarrow E(X)=\frac{1}{p}$

Loi de Poisson $\rightarrow E(X)=\lambda$

Prop 1: Si X(Ω) possède un maximum et un minimum, alors E(X) existe et $x_{\min}\leq E(X)\leq x_{\max}$.

Th 1: Si Ω est fini ou dénombrable, alors: (2)
$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$, sous réserve de cv. absolue.

Prop 2: **Linéarité de l'opérateur E.** Soient X, Y var discrètes sur Ω qui possèdent une espérance, et λ∈ℝ. Alors X+λY est une var discrète sur Ω qui possède une espérance, et $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$ (3)

Th 2: **Théorème de transfert.** Soient X var discrète, d'image $X(\Omega)=\{x_i / i\in I\}$ où I partie non vide de ℕ, et g continue par mcx, définie sur un intervalle J tq. X(Ω)⊂J. Alors $g\circ X$ est une var discrète et:
$E(g(X))=\sum_i g(x_i)P(X=x_i)$, sous réserve de c. abs.

Exemple 3.1 p.54...: *(moment d'ordre 2, Cf. §B)*

$$E(X^2)=(-10)^2\times\frac{16}{49}+(-2)^2\times\frac{24}{49}+6^2\times\frac{9}{49}=\frac{2020}{49}$$

Th 3:(p.103)Soient X et Y deux var discrètes indépendantes admettant une espérance, alors la var **XY** admet une espérance et $E(XY)=E(X).E(Y)$.
Récipque fausse, cette égalité ne rend pas X et Y indep.

Prop 3: (p.103) Soit F l'ens. des var discrètes sur le même (Ω,$\mathcal{A}$,P), et F_1 le sous-ens. de celles qui possèdent une espérance. Alors:
F_1 est un s-ev de F, et **E est une forme linéaire** sur F_1.

B. Variance et écart-type.

Def 2: On appelle **moment d'ordre 2** de X l'espérance, si elle existe, de la variable X^2. D'après le th. de transfert,
$E(X^2)=\sum_i x_i^2 P(X=x_i)$

Def 3: On appelle **variance** de X l'espérance, si elle existe, de la variable $(X-E(X))^2$:
$V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=\sum_i (x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$

C'est une "moyenne des écarts à la moyenne", indicatrice de "dispersion" autour de E(X).

Prop 4: si X admet une variance, alors:
$V(X)\geq 0$, et $V(X)=0 \Leftrightarrow X$ constante

Calcul pratique de la variance:
Th. 4: Formule de Koenig-Huygens: Si V(X) existe, alors
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\sum_i x_i^2 P(X=x_i)-\left(\sum_i x_i P(X=x_i)\right)^2$$

La variance est (la my. des carrés) – (le carré de la my.)

Exemple 3.1 p.54...:

$$V(X)=(-10)^2\times\frac{16}{49}+(-2)^2\times\frac{24}{49}+6^2\times\frac{9}{49}-\left(\frac{-22}{7}\right)^2\simeq 31,35$$

Exemples "classiques":

Loi uniforme sur $[\![1;n]\!] \rightarrow V(X)=\frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli $\rightarrow V(X)=p(1-p)$

Loi binomiale $\rightarrow V(X)=np(1-p)$

Loi géométrique $\rightarrow V(X)=\frac{1}{p^2}(1-p)$

Loi de Poisson $\rightarrow V(X)=\lambda$

Prop 5: Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. Si X possède une variance, alors $aX+b$ aussi, et: $V(aX+b)=a^2V(X)$.

Def 4: On appelle, lorsque X admet une variance, **écart-type** de X le réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Def 5: On appelle **variable centrée** tte vble X tq E(X)=0, et **variable réduite** tte vble X tq V(X)=1.

Prop 6: (p.103) Soit F_2 l'ens. des éléments de F qui possèdent une variance. F_2 est un **s-ev de F inclus ds F_1**.

II. Cas d'une v.a.r. à densité (p.122) (4)

Analogie avec le cas discret où les poids de probabilités sont les p_i, ici ce sont les valeurs de f.

Def 6: Soit X une var de densité f. On appelle **espérance de X** le réel: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\,dt$,

sous réserve de cv. abs. de cette intégrale.

Prop 7: **Linéarité de E.** Soient X, Y deux var à densité admettant une espérance, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $X+\lambda Y$ admet une espérance et: $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$.

Th 5: **Théorème de transfert.** Soit X une var de densité f, et $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tq **$|\Phi|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.** Alors $\Phi(X)$ possède une espérance et: $E(\phi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)f(x)\,dx$

Def 7: On appelle **moment d'ordre 2** l'espérance, si elle existe, de la variable X^2. Sous réserve de convergence:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Prop 8: Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède une espérance.

Def 8: Soit X de densité f. On appelle **variance** de X l'espérance, si elle existe, de la variable $(X-E(X))^2$.

$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx$, sous réserve de Cv.

Prop 9: formule de Koenig: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

III. Convergence en probabilité - Loi faible des grands nombres (p.159).

Les v.a.r. considérées sont soit discrètes, soit à densité.

Th 6: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Soit X une v.a.r. possédant une espérance m et une variance σ^2. Alors:

$$\forall a>0,\quad P(|X-m|\geq a)\leq\frac{\sigma^2}{a^2}$$

Cette inégalité sert surtout à prouver la loi faible des grands nombres; numériquement, la majoration est souvent médiocre.

Def 9: Soient (X_n) une suite de v.a.r. et X une v.a.r. définies sur la même espace $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
On dit que (X_n) **converge vers X en probabilité** si:

$$\forall\alpha>0,\ P(|X_n-X|>\alpha)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

La proba d'avoir un écart entre X_n et X supérieur à α tend vers 0 qd $n\to\infty$.

Th 7: Loi faible des grands nombres. Soit (X_n) une suite de v.a.r. définies sur la même espace $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes, et admettant la même espérance m et la même variance σ^2. On définit leur moyenne Z_n par:

$\forall n\in\mathbb{N}^*, Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Alors $Z_n\xrightarrow[n\infty]{}m$ en proba.

On n'exige pas que les variables aient même loi.

Application: **Th. de Bernoulli.** Soient des variables de Bernoulli indépendantes, associées à la répétition de la même expérience aléatoire (pour la quelle on s'intéresse à une événement appelé succès et noté S):

$$X_n=\begin{cases}0 \text{ si à la n° épreuve on a } \overline{S}\\ 1 \text{ si à la n° épreuve on a } S\end{cases}$$

En notant p=P(S), on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ X_n\sim B(p)$, et:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\infty]{}p$ en probabilités.

Le nombre moyen de succès obtenu aux n premières épreuves tend à se stabiliser autour de p, ie $P(S)\simeq p$.

IV. Notes.

*Wikipedia: **L'espérance mathématique** d'une variable aléatoire est l'équivalent en probabilité de la moyenne d'une série statistique en statistiques. Elle se note E(X) et se lit espérance de X. C'est une valeur numérique permettant d'évaluer le résultat moyen d'une expérience aléatoire. Elle permet par exemple de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard; elle est alors égale à la somme des gains (et des pertes) pondérés par la probabilité du gain (ou de la perte). Lorsque l'espérance est égale à 0, le jeu est dit équitable.*
*En statistique et probabilité, **la variance** est une mesure arbitraire servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon.*
*En mathématiques, plus précisément en statistiques et probabilités, **l'écart type** mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.*

(1)On note var pour "variable aléatoire réelle".
(2) ce th. permettra de mq l'opérateur E est linéaire, et fait le lien avec la théorie de la mesure, où l'on écrirait: $E(X)=\int_\Omega XdP$. Mais il apeu d'intérêt pour le calcul pratique de E(X).

(3) L'idée est de décomposer canoniquement les var discrètes comme combinaison de fonctions caractéristiques.

(4) **Var à densité:**
Def : Soit X une var: on dit que X **admet une densité** f si sa fonction de répartition (1) F est continue et peut s'écrire sous la forme: $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$, avec:

1) $f\geq 0$
2) f possède un nombre fini de points de diccontinuité
3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=1$

f n'est pas unique (la modifier en 1 pt).